

华泰期货波动率曲面拟合系列报告（一）—— 避繁就简却明效大验的 SVI 模型

研究院 量化组

研究员

高天越

☎ 0755-23887993

✉ gaotianyue@htfc.com

从业资格号：F3055799

投资咨询号：Z0016156

联系人

李光庭

☎ 0755-23887993

✉ liguangting@htfc.com

从业资格号：F03108562

李逸资

☎ 0755-23887993

✉ liyizi@htfc.com

从业资格号：F03105861

投资咨询业务资格：
证监许可【2011】1289号

摘要

BS 模型假设标的资产价格服从波动率恒定的几何布朗运动，而波动率曲面拟合的目的是为了引入随行权价或到期日期而变化的隐含波动率函数。波动率曲面拟合通过根据不同期限和行权价的历史数据，拟合出一个平滑的波动率曲面，使得标的资产价格的波动率随着时间和价格的变化而变化。因此，波动率曲面拟合是对 BS 模型的改进和完善。本系列报告主要关注波动率曲面拟合模型对于商品期权做市商的帮助作用。

首先，波动率曲面拟合有助于保证无严格套利机会。平价套利、垂直套利和蝶式套利的存在为市场参与者创造了无风险套利的机会，波动率曲面拟合模型能够有效挖掘市场上的定价错误，帮助做市商进行纠正，从而减少风险敞口。

其次，从分类上来说，波动率曲面拟合模型分为参数模型、半参数模型和非参数模型。参数模型包括 SABR 模型、CEV 模型、SVI 模型、SSVI 模型和 eSSVI 模型等。半参数模型包括 Wing 模型、样条插值模型等。非参数模型包括无蝶式套利模型等。本专题系列报告第一篇将着重于 SVI 模型的介绍。

对于 SVI 模型，SVI 模型是受随机波动率模型的启发，然后对隐含波动率曲面进行参数化建模的模型，与极限情况下的 Heston 模型等同。SVI 模型共有五个参数需要拟合，Quasi SVI 模型仅需两个参数。由于其理论性和计算简便性成为了业界最广泛使用的波动率曲面拟合模型之一。

核心观点

从拟合效果上看，SVI 模型和 Quasi SVI 模型拟合效果一致，Quasi SVI 模型拟合速度较快。SVI 模型拟合准确性较高，平值附近拟合效果很好，对深度虚值和深度实值也有较好的拟合效果。曲线总体平滑，符合理论假设，在无严格套利的基础上，较为准确地反映了市场情况。

目录

摘要.....	1
核心观点.....	1
波动率曲面拟合简介.....	4
■ 什么是波动率曲面.....	4
■ 波动率曲面拟合的作用.....	4
■ 本文研究范围.....	4
套利情况分析.....	5
拟合模型一览.....	7
■ 参数模型.....	7
■ 半参数模型.....	9
■ 非参数模型.....	9
SVI 模型.....	9
■ SVI 模型介绍.....	9
■ Quasi SVI 模型介绍.....	10
■ Natural SVI 模型介绍.....	11
■ SVI Jump-Wings 模型介绍.....	12
■ SVI 模型的优势.....	12
实证分析.....	13
■ 数据处理.....	13
■ 拟合过程.....	13
■ 拟合指标.....	14
■ 实证结果.....	15

图表

图 1: 改变各参数对曲线的影响..... 10

图 2: NATURAL SVI 模型形式..... 11

图 3: SVI JUMP-WINGS 模型假设..... 12

图 4: 看涨、看跌期权买一卖一隐含波动率的三种情况..... 14

图 5: SVI 模型拟合结果..... 15

表 1: 平价套利收益分析 (理论收益未计算成本) 6

表 2: 垂直套利收益分析 (理论收益未计算成本) 6

表 3: 日历套利收益分析 (理论收益未计算成本) 7

表 4: 蝶式套利收益分析 (理论收益未计算成本) 7

波动率曲面拟合简介

■ 什么是波动率曲面

Black-Scholes 模型 (后称 BS 模型)是期权定价最常用的模型, 其核心假设之一是股票价格服从波动率恒定的几何布朗运动。

然而, 波动率恒定的假设与真实市场情形存在较大偏差。从行权价的角度上看, 波动率为常数的 BS 模型在不同执行价的合约之间存在系统性偏差。这种偏差在 BS 模型所反推出的隐含波动率曲线上的体现为波动率微笑 (或波动率斜笑)。从期限的角度上看, 波动率微笑现象在近月合约上会更加明显。随着对期权研究的深入, 学术界充分意识到 BS 模型的局限性, 部分学者对 BS 模型进行了不同程度的修改, 以弥补模型本身存在的不足。

拟合期权波动率曲面就是金融市场中用于优化 BS 模型中隐含波动率假设的一种方法。期权波动率曲面是一个三维曲面, 其横轴表示不同的到期日, 纵轴表示不同的行权价格, 而曲面上的每个点则表示对应期权的隐含波动率。拟合期权波动率曲面的目的是通过市场上已有的期权价格数据, 利用数学模型来计算出每个到期日和行权价格对应的合理隐含波动率。

■ 波动率曲面拟合的作用

波动率曲面拟合在期权市场中扮演着重要的角色, 对市场参与者提供了对波动率的准确估计, 为定价、风险管理和交易决策提供了有力的支持。下面分别从期权做市商和期权投资者的角度阐述其作用。

对于期权做市商, 波动率曲面拟合具有以下两个主要作用。首先, 它提供了定价优势。通过估计实时的波动率曲面, 做市商能够根据拟合出的隐含波动率确定合理的买卖报价, 在避免被无风险套利的基础上, 吸引更多交易对手方参与市场。此外, 波动率曲面拟合也有助于评估和管理风险敞口, 通过监测波动率曲面的变化, 做市商可以及时调整定价和交易策略, 有效降低风险暴露并保护利润。

对于期权投资者而言, 波动率曲面拟合同样具备重要作用。首先, 它提供了无风险套利的发现机会。通过对波动率曲面的分析, 投资者可以发现期权市场中的价格偏差和波动率的不一致性, 从而利用这些机会获得利润。其次, 波动率曲面拟合为投资者优化交易策略提供了基础。投资者可以根据波动率曲面的形态和趋势调整交易策略, 选择更有潜力的交易机会, 优化持仓结构、降低风险, 并提高交易的效率和盈利能力。

■ 本文研究范围

在本专题报告系列中，我们的研究对象是商品期权的波动率曲面拟合，主要的目标群体是做市商，致力于为商品期权做市商提供更准确的报价和相应的理论支撑。由于商品期权的特殊性，不同期限的商品期权所对应的商品期货标的在时间期限上也不同，所以商品期权的波动率曲面分析中无需过多考虑到期限这一维度，只需考虑波动率曲线关于价值程度的拟合。我们将特别关注近月期权合约以及平值期权附近的拟合效果。这是因为近月期权合约交易量更大，流动性更好，做市商要面对的风险敞口也更大；另外，平值期权附近的 Vega 较大，隐含波动率的误差将带来较大的价格风险。在波动率曲面拟合过程中，主要解决的三大问题如下：

- (1) 提供报价：由于流动性或其他原因，某些期权合约可能没有有效的市场报价。为了给出合适的报价，我们需要拟合波动率曲面。
- (2) 防止市场操纵：期权市场易受到市场操纵行为的影响，市场中可能存在非理性行为，导致市场价与真实价值存在偏差。
- (3) 避免严格套利：期权的特殊性让市场中可能存在日历套利、蝶式套利、垂直套利、平价套利等严格套利机会，波动率曲面要考虑到无套利条件。

套利情况分析

当市场上存在价格偏差时，可能存在无风险套利机会。套利者可以通过买入被低估的期权合约并卖出被高估的期权合约，从价格回归中获取无风险利润。通过拟合波动率曲面，期权做市商可以更准确地估计期权的合理价格，减少市场价格偏差的出现，从而避免无风险套利机会的出现。

期权市场中的无风险套利机会主要有以下几类：平价套利、垂直套利、日历套利和蝶式套利，下面将对四种无风险套利进行分析。

平价套利是一种利用期权定价理论中的 Put-call parity 关系进行套利的策略。平价套利基于以下原理：在特定条件下，同一标的资产、相同到期时间的看涨和看跌期权之间存在一个关系，即它们的合理价格应该保持一致。根据 Put-call parity 关系，对于同一标的资产、相同到期时间的看涨和看跌期权，它们的价格之间应满足如下等式关系：假设 S 是标的资产价格， C 是看涨期权的价格， P 是看跌期权的价格， K 是行权价， r 是无风险利率， T 是到期时间，那么 Put-call parity 关系可以表示为： $C - P = S - K \times e^{-rT}$ 。

平价套利的核心思想是，当 Put-call parity 关系不成立时，套利机会出现。如果市场上的看涨期权和看跌期权的价格之间存在差异，违反了 Put-call parity 关系，

投资者可以同时进行买入低价的期权合约并卖出高价期权合约，以实现价格差额的无风险套利收益。

表 1: 平价套利收益分析（理论收益未计算成本）

套利类型	交易方向	品种	理论收益
正向套利	买入	标的证券	
	买入	同月份同行权价看跌期权	$C + Ke^{-rT} - P - S_0$
	卖出	同月份同行权价看涨期权	
反向套利	卖出	标的证券	
	卖出	同月份同行权价看跌期权	$P + S_0 - C - Ke^{-rT}$
	买入	同月份同行权价看涨期权	

数据来源：华泰期货研究院

垂直套利是一种基于同一到期时间、不同行权价的期权合约之间的价格差异进行套利的策略。在垂直套利中，只要套利组合构建的成本小于 0，投资者可以买入或卖出高行权价看涨期权，并同时反向买卖低行权价期权合约来获取无风险套利收益。

表 2: 垂直套利收益分析（理论收益未计算成本）

套利类型	交易方向	品种	价格区间	理论收益
牛市看涨期权套利	买入	低行权价看涨期权	$S_T \geq K_2$	$K_2 - K_1 > 0$
			$K_1 \leq S_T \leq K_2$	$S_T - K_1 > 0$
	卖出	高行权价看涨期权	$S_T \leq K_1$	0
牛市看跌期权套利	买入	低行权价看跌期权	$S_T \geq K_2$	0
			$K_1 \leq S_T \leq K_2$	$S_T - K_2 < 0$
	卖出	高行权价看跌期权	$S_T \leq K_1$	$K_1 - K_2 < 0$

* K_1 为低行权价， K_2 为高行权价。

数据来源：华泰期货研究院

日历套利是一种利用同一标的资产但到期时间不同的期权合约之间的价格差异进行套利的策略。在日历套利中，投资者会同时买入一个到期时间较远的期权合约并卖出一个到期时间较近的期权合约。只要套利组合构建的成本小于 0，投资者可以获得无风险的时间价值收益。

请仔细阅读本报告最后一页的免责声明

表 3: 日历套利收益分析（理论收益未计算成本）

套利类型	交易方向	品种	近月到期	远月到期	理论收益
看涨期权日历套利	买入	远月看涨期权	$S_{T_1} \leq K$	$S_{T_2} \leq K$	0
			$S_{T_1} \leq K$	$S_{T_2} > K$	$S_{T_2} - K > 0$
	卖出	近月看涨期权	$S_{T_1} > K$	$S_{T_2} \leq K$	$K - S_{T_2} > 0$
			$S_{T_1} > K$	$S_{T_2} > K$	0

* T_1 为近月到期时间， T_2 为远月到期时间， K 为共同的行权价。

数据来源：华泰期货研究院

蝶式套利是一种基于不同行权价的期权合约之间的价格差异进行套利的策略。在蝶式套利中，投资者会同时买入两个行权价较低和较高的期权合约，并卖出两个行权价位于中间的期权合约。只要蝶式套利组合构建的成本小于 0，投资者可以获取稳定的无风险套利收益。蝶式套利通常适用于市场预期价格在一定范围内波动或保持稳定的情况下，以获取期权合约之间的差额利润。

表 4: 蝶式套利收益分析（理论收益未计算成本）

价格区间	买入 K_1 看涨期权	卖出 K_2 看涨期权	买入 K_3 看涨期权	收益合计
数量（张）	1	2	1	
$S < K_1$	0	0	0	0
$K_1 \leq S < K_2$	$S - K_1$	0	0	$S - K_1 > 0$
$K_2 \leq S < K_3$	$S - K_1$	$K_2 - S$	0	$K_3 - S > 0$
$S \geq K_3$	$S - K_1$	$K_2 - S$	$S - K_3$	0

数据来源：华泰期货研究院

由于商品期权同品种不同期限的标的期货合约不同，日历套利不再是一个无风险套利策略，因此本系列报告不会考虑无日历套利的假设。这些无风险套利策略都依赖于市场中的价格异常和价格波动，投资者可以通过以上无风险套利策略有效地利用这些差异，从而获取套利收益。

拟合模型一览

波动率曲面拟合模型包括参数模型、半参数模型和非参数模型。本文作为商品期权波动率拟合专题报告系列的第一期，将着重于对参数模型中的 SVI 模型进行介绍。

■ 参数模型

请仔细阅读本报告最后一页的免责声明

参数模型在现实中应用广泛。常见的参数模型包括但不限于以下几种：

(1) Heston 模型：Heston 模型是一种常见的随机波动率模型，用于描述金融市场中波动率的动态变化。它是在 BS 模型的基础上引入了随机波动率过程，以更准确地描述市场观察到的波动率行为。Heston 模型假设波动率是一个均值复归的平方根过程，并把两个布朗运动的相关系数作为参数之一。该模型包括两个主要方程：分别描述标的资产价格和波动率的随机漂移和扩散过程。Heston 模型的缺陷在于参数拟合速度较慢。

(2) SABR 模型：SABR 模型是一种简化的随机波动率模型，广泛应用于外汇和利率市场的期权定价和波动率曲面建模。SABR 模型基于对冲策略和市场动态的考虑，通过引入四个参数（即 SABR 参数）来描述波动率的动态变化。这些参数分别表示波动率的水平、斜度、曲度和相关性。SABR 模型的优点在于它能够灵活地捕捉市场观察到的波动率曲面的形态，尤其对于极端行权价和到期时间的情况具有较好的适应性。

(3) CEV 模型：CEV 模型是一种常见的局部波动率模型，用于描述波动率随标的资产价格变化的关系。该模型假设波动率与标的资产价格的幂函数关系，并且波动率的变化率随着标的资产价格的变化而改变。CEV 模型的函数形式可以表示为 $\sigma(S) = a \cdot S^b$ ，其中 $\sigma(S)$ 是标的资产价格为 S 时的波动率， a 和 b 是模型的参数。通过历史数据的回归分析，可以估计出适当的参数值，并利用该模型来预测未来的波动率。CEV 模型在局部范围内能够较好地拟合波动率数据，尤其适用于描述股票等资产的波动率行为。

(4) SVI (Stochastic Volatility Inspired) 模型属于基于参数的模型，它是一种用于拟合波动率曲面的随机波动率模型。SVI 模型的灵感来自于 Heston 模型，但相比于 Heston 模型更简化和高效。SVI 模型的函数形式简单，运算速度快，并且在期限趋于无穷大时 Heston 模型会趋近于 SVI 模型，具有很强的适应性，被广泛应用于实际场景中。

(5) SSVI 模型：SSVI (Surface SVI) 模型是由 Gatheral 于 2014 年提出的，主要思想是在 SVI 模型的基础上增加了关于无静态套利（日历套利和蝶式套利）的假设，并给出了相应条件。SSVI 为 SVI 模型的应用赋予了更多实际意义。

(6) eSSVI 模型：eSSVI (extended SSVI) 模型对 SSVI 模型进行了进一步的扩展，将参数 ρ 修改为到期时间 T 的函数 $\rho(T)$ ，将函数 $\varphi(\theta)$ 放宽为可最优化的变量而不限制具体形式，并给出了扩展的无套利条件（充分非必要）。

由于本文主要分析的是商品期权，其不同到期日的期权标的不同，因此无需考虑日历套利，部分削弱了 SSVI 与 eSSVI 在商品期权中的意义。

■ 半参数模型

半参数模型包括 Wing 模型和样条插值模型等。

(1) Wing 模型：Wing 模型是一种用于拟合波动率曲面形态的模型，主要用于期权定价和波动率曲面调整。Wing 模型通过对波动率曲线进行分段参数化拟合，以更好地刻画波动率曲面在不同行权价和到期时间上的形状。它常用于对市场观察到的波动率曲面进行插值和外推，以提供更准确的期权定价和风险管理。

(2) 样条插值模型：样条插值是一种常用的插值方法，它通过在给定数据点之间分段拟合平滑的曲线来估计波动率曲面。常见的样条插值方法包括线性插值、二次样条插值和三次样条插值。一般来说，三次样条插值兼顾了准确性和计算的简便性，可以一定程度上避免过拟合问题。

■ 非参数模型

非参数模型包括无蝶式套利模型等。

(1) 无蝶式套利模型：无蝶式套利模型对波动率曲面不限定一个具体的函数形式，而是直接对需要拟合的波动率进行优化，使用市场真实 IV 作为初值，最优化隐含波动率误差与产生蝶式套利的惩罚项之和，得到无蝶式套利的隐含波动率拟合值。

SVI 模型

■ SVI 模型介绍

SVI (Stochastic Volatility Inspired) 模型最初是由美林证券 1999 年设计使用，并于 2004 年由 Gatheral 在一次会议上公开展示的一种波动率模型。SVI 模型被广泛应用于期权定价和波动率曲面拟合。它通过参数化曲线来描述波动率曲面，并通过最小化与市场观察值之间的误差来拟合实际数据。

从名字也可以看出，该模型是受随机波动率模型的启发，然后对隐含波动率曲面进行参数化建模的模型。

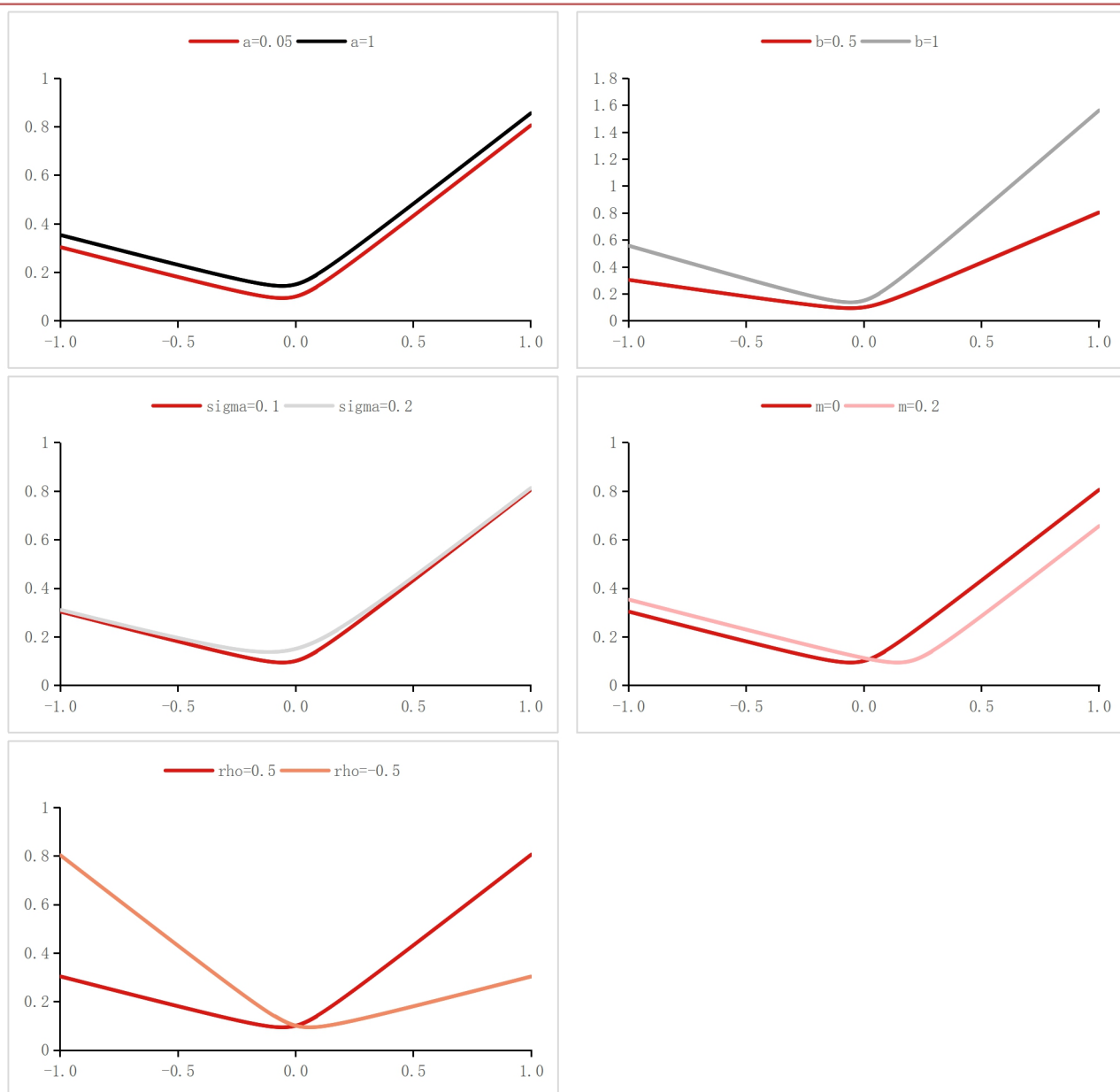
SVI 模型假设隐含方差 w 和期权的价值程度 k 符合以下公式：

$$w(k; a, b, \sigma, \rho, m) = a + b(\rho(k - m) + \sqrt{(k - m)^2 + \sigma^2})$$

其中 $k = \ln(K/F)$ 为期权的价值程度， $a \in \mathbb{R}, b \geq 0, |\rho| < 1, m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ ，因此可以保证隐含方差非负。

如下图所示，不同的参数控制了曲线的不同形态。

图 1: 改变各参数对曲线的影响



数据来源：华泰期货研究院

■ Quasi SVI 模型介绍

Quasi SVI 模型（又称 SVI*模型）是由 Zeliade Systems 公司在 2009 年提出的，主要思想是使用准显示校准（Quasi explicit calibration）方法，将 SVI 模型求解变为了两步优化，把 5 变量优化问题转化为 2 变量优化问题，显著加快了模型拟合速度及准确性。转化方法简要介绍如下：

原 SVI 模型的总体方差公式形式为：

$$v(k; a, b, \sigma, \rho, m) = aT + bT(\rho(k - m) + \sqrt{(k - m)^2 + \sigma^2})$$

原最优化问题为：

请仔细阅读本报告最后一页的免责声明

$$(P) \min_{c,d,\tilde{a} \in D} \sum_{i=1}^n (v(k_i; a, b, \sigma, \rho, m) - \bar{v}_i^2)^2$$

假设

$$y = \frac{k - m}{\sigma}$$

则

$$v(k; a, b, \rho, y) = aT + b\sigma T(\rho y + \sqrt{y^2 + 1})$$

令

$$\tilde{a} = aT$$

$$c = b\sigma T$$

$$d = \rho b\sigma T$$

当 m, σ 给定时，以下最优化问题变为三元线性回归问题，可以用矩阵方法快速地给出解析解：

$$(P_{m,\sigma}) \min_{c,d,\tilde{a} \in D} \sum_{i=1}^n (\tilde{a} + dy_i + c\sqrt{y_i^2 + 1} - \bar{v}_i^2)^2$$

即只需要对 m, σ 进行二元优化，从 5 变量优化问题转化为 2 变量优化问题，大大降低了计算复杂度及非全局最优的可能性。理论上 Quasi SVI 模型和 SVI 模型是一致的，只是最优化参数的方法不同，经测试两者的结果近乎完全一致。

■ Natural SVI 模型介绍

Natural SVI 的思想来自于随机波动率模型中的 Heston 波动率微笑在剩余期限趋向于无穷时的形式，其形式更加利于数学推导。虽然 Natural SVI 模型本身现实意义不强，但是对于后续专题报告中推导 SSVI 和 eSSVI 模型有辅助作用。

图 2: Natural SVI 模型形式

For a given parameter set $\chi_N = \{\Delta, \mu, \rho, \omega, \zeta\}$, the natural SVI parameterization of total implied variance reads:

$$w(k; \chi_N) = \Delta + \frac{\omega}{2} \left\{ 1 + \zeta \rho (k - \mu) + \sqrt{(\zeta(k - \mu) + \rho)^2 + (1 - \rho^2)} \right\}, \quad (3.2)$$

数据来源:《Arbitrage-free SVI volatility surfaces》, 华泰期货研究院

■ SVI Jump-Wings 模型介绍

SVI Jump-Wings(SVI-JW)将五个参数变换为了更具实际意义的指标, 包含平值期权的方差、曲线在平值期权位置的偏斜程度、左翼(看跌期权)的斜率、右翼(看涨期权)的斜率、隐含方差的最小值。这些参数更有利于交易员在实际应用场景中进行判断, 形成经验指标。注意到, 无论是 Natural SVI 模型还是 SVI-JW 模型, 模型的拟合方法与 SVI 模型是完全一致的, 更多的意义在于丰富 SVI 模型的理论基础和现实意义。本质上, 只要对 Natural SVI 模型和 SVI-JW 模型的参数进行反解, 也可以得到 SVI 模型的五个参数。

图 3: SVI Jump-Wings 模型假设

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{a + b \left\{ -\rho m + \sqrt{m^2 + \sigma^2} \right\}}{t}, \\ \psi_t &= \frac{1}{\sqrt{w_t}} \frac{b}{2} \left(-\frac{m}{\sqrt{m^2 + \sigma^2}} + \rho \right), \\ p_t &= \frac{1}{\sqrt{w_t}} b (1 - \rho), \\ c_t &= \frac{1}{\sqrt{w_t}} b (1 + \rho), \\ \tilde{v}_t &= \frac{1}{t} \left(a + b \sigma \sqrt{1 - \rho^2} \right), \end{aligned}$$

- v_t gives the ATM variance;
- ψ_t gives the ATM skew;
- p_t gives the slope of the left (put) wing;
- c_t gives the slope of the right (call) wing; and
- $\tilde{v}_t$ is the minimum implied variance.

数据来源:《Arbitrage-free SVI volatility surfaces》, 华泰期货研究院

■ SVI 模型的优势

SVI 模型在商品期权波动率曲面拟合中具有以下优点:

1. 灵活性: SVI 模型相对于其他随机波动率模型具有较高的灵活性。它可以根据市场观察到的波动率曲线形态进行调整, 以更好地拟合实际的波动率数据。这种灵活性使得 SVI 模型能够适应不同商品期权市场条件和标的资产的特点, 成为业界最广泛使用的模型之一。
2. 简化和高效性: 相对于一些复杂的随机波动率模型, 如 Heston 模型, SVI 模型具有简化和高效的优势。它在保持一定的拟合准确性的同时, 减少了参数的

数量和计算的复杂性。Quasi SVI 模型还可以进一步减少参数至两个，使得模型的使用更加便捷和高效。

3. 理论意义：模型函数形式具有实际意义，随机波动率模型中的 Heston 模型在到期时间趋于极限的情况下会趋近于 SVI 模型。

实证分析

■ 数据处理

在实证分析部分，我们选择了白糖 SR307 作为商品期权标的，时间范围为 2023 年 4 月 26 日至 2023 年 4 月 28 日，时间段覆盖日盘和夜盘，平均半小时拟合一次波动率曲面。选择这一样本的原因主要有以下两点：

(1) 选择 2023 年 7 月到期的商品期货作为期权标的，原因是我们更加关注近月合约的波动率曲面拟合情况。近月合约的成交量更大，拟合出现偏误会显著增加做市商的成本，并且近月合约具有更好的流动性和较窄买卖价差，容易产生更多套利机会。此外，近月合约的波动率微笑特征明显，进一步凸显了进行波动率曲面拟合的必要性。

(2) 因为近月期权合约出现异常报价的可能性更高，比如产业客户的套保行为，该样本内波动率曲面拟合值和真实值在简单模型情况下误差较大，可以更好地测试各个拟合模型的表现。

具体到每一个时间点的波动率曲线，我们的数据处理方法分为以下几步：

首先，对于每个行权价所对应的波动率计算，各类波动率曲面拟合文献中的处理一般是仅考虑虚值期权。由于平值期权附近的看涨期权和看跌期权流动性都较好，应该同时考虑，因此我们使用对数行权价 ($k = \ln(K/F)$) 筛选，在平值期权附近兼顾了看涨和看跌期权的波动率。

具体数据选取方法如下：

当 $k > 0.06$ 时，只考虑看涨期权的买卖市场价。

当 $k < -0.06$ 时，只考虑看跌期权的买卖市场价。

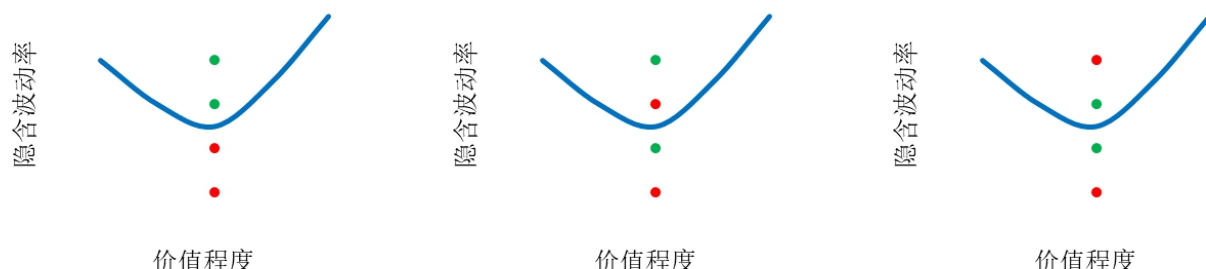
当 $-0.06 < k < 0.06$ 时，同时考虑看涨期权和看跌期权的买卖市场价。

■ 拟合过程

首先，为了进一步阐释平值期权附近的隐含波动率是如何分析的，我们将看涨期权和看跌期权的买一和卖一可能出现的价格情况分为三类，并分别解释不同情况下拟合所用的数据点。后文中的 ask 全部为买一价，bid 为卖一价。下图中

红色和绿色点分别代表看涨和看跌期权，同色点中较高的为 ask 隐含波动率，较低的为 bid 隐含波动率。两两组合构成了下图中的四个点。

图 4: 看涨、看跌期权买一卖一隐含波动率的三种情况



数据来源：华泰期货研究院

在左图中，看跌期权的隐含波动率均大于看涨期权，说明不满足 put-call parity 条件，出现平价套利机会。隐含波动率应向中间回归，拟合数据点也应位于中间。

在中图中，看涨期权的 ask 隐含波动率高于了看跌期权的 bid 隐波，此时拟合数据点取中间两点的平均值，可以保证波动率曲线同时穿过两类 ask 和 bid 内部。

在右图中，看涨期权的隐含波动率包裹了看跌期权的隐波，说明当前看涨期权的 ask-bid 价差过大，与之相比，看跌期权价格数据更有意义，因此取看跌期权的 ask-bid 中间价作为拟合数据。

综合以上三种情况，我们得到了平值附近数据点的选取情况。在 $k > 0.06$ 或 $k < -0.06$ 处，数据点直接设置为 ask-bid 中间价。

随后，在拟合过程中，我们使用上一时间点（一般为半小时前）计算得到的参数作为初值，从而可以加快拟合速度，并减少优化结果为局部最优解的概率。在 Quasi SVI 模型中，需要优化的参数为两个，优化过程中包括了以解析解形式得到的三变量线性回归参数。

■ 拟合指标

我们使用了 Vega 加权 RMSE 作为代价函数。RMSE 指的是均方误差，是一个常用的拟合指标，Vega 加权表示主要考虑波动率变化带来的风险敞口，对平值附近的数据点权重更大，对应了对于做市商来说更重要的平值期权合约。

RMSE 的公式形式如下所示，在最优化过程中最小化 Vega 加权 RMSE 以得到模型参数。

$$RMSE' = \sqrt{\sum w_i (iv_i - \hat{iv})^2}$$

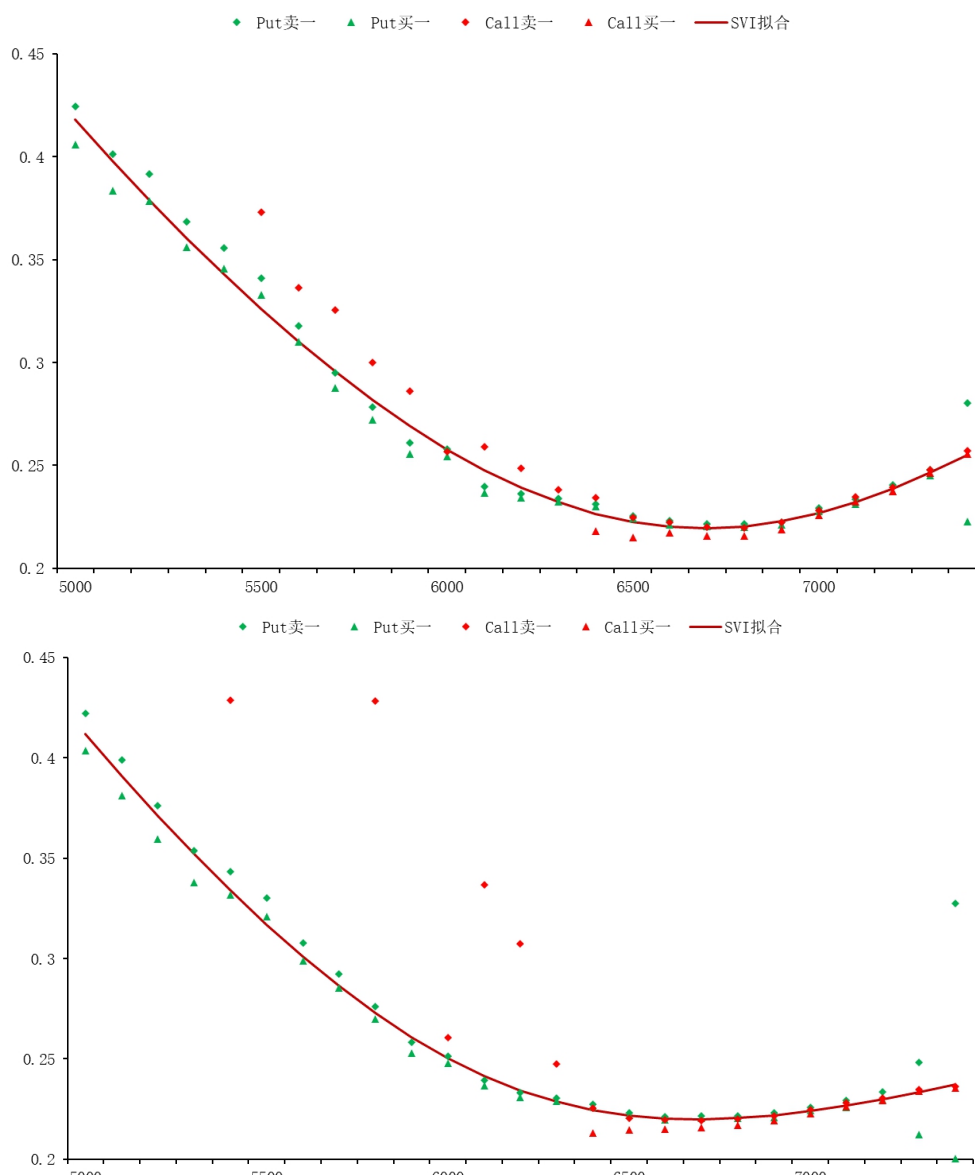
其中

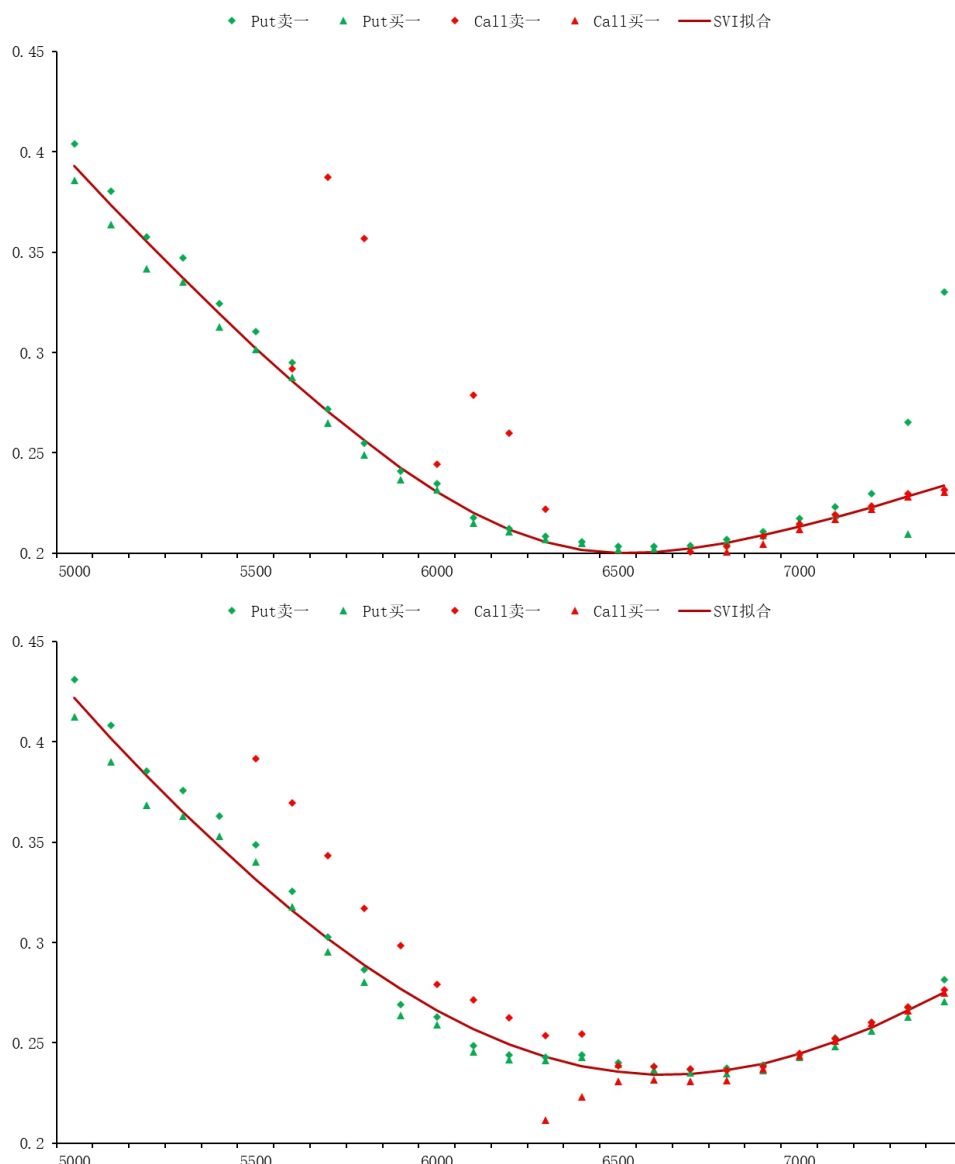
$$w_i = \frac{Vega_i}{\sum Vega_i}$$

■ 实证结果

在下图中，我们对于四个时间点分别画出了 SVI 模型拟合的波动率曲线，并且标准了相应看涨期权的买一和卖一价以及看跌期权的买一和卖一价。从拟合效果上看，Quasi SVI 模型的拟合准确性较高，平值附近拟合效果很好，对深度虚值和深度实值也有较好的拟合效果。曲线总体平滑，符合理论假设，准确地反映了市场情况。

图 5: SVI 模型拟合结果





数据来源：Wind，华泰期货研究院

总结

本文作为华泰期货波动率曲面拟合专题的第一篇报告，主要介绍了 SVI 及其衍生模型的基本概念及其国内实证效果。BS 模型假设标的资产价格服从波动率恒定的几何布朗运动，而波动率曲面拟合的目的是为了引入随行权价或到期日期而变化的隐含波动率函数。波动率曲面拟合通过根据不同期限和行权价的历史数据，拟合出一个平滑的波动率曲面，使得标的资产价格的波动率随着时间和价格的变化而变化。因此，波动率曲面拟合是对 BS 模型的改进和完善。本系列报告主要关注波动率曲面拟合模型对于商品期权做市商的帮助作用。

首先，波动率曲面拟合有助于保证无严格套利机会。平价套利、垂直套利和蝶式套利的存在为市场参与者创造了无风险套利的机会，波动率曲面拟合模型能够有效挖掘市场上的定价错误，帮助做市商进行纠正，从而减少风险敞口。

请仔细阅读本报告最后一页的免责声明

其次，从分类上来说，波动率曲面拟合模型分为参数模型、半参数模型和非参数模型。参数模型包括 SABR 模型、CEV 模型、SVI 模型、SSVI 模型和 eSSVI 模型等。半参数模型包括 Wing 模型、样条插值模型等。非参数模型包括无蝶式套利模型等。本专题报告系列第一篇着重于 SVI 模型的介绍。

对于 SVI 模型，SVI 模型是受随机波动率模型的启发，然后对隐含波动率曲面进行参数化建模的模型，与极限情况下的 Heston 模型等同。SVI 模型共有五个参数需要拟合，Quasi SVI 模型仅需两个参数。由于其理论性和计算简便性成为了业界最广泛使用的波动率曲面拟合模型之一。也是专题系列报告 1 的主要介绍对象。

从拟合效果上看，SVI 模型和 Quasi SVI 模型拟合效果一致，Quasi SVI 模型拟合速度较快。SVI 模型拟合准确性较高，平值附近拟合效果很好，对深度虚值和深度实值也有较好的拟合效果。曲线总体平滑，符合理论假设，在无严格套利的情况下，较为准确地反映了市场情况。

免责声明

本报告基于本公司认为可靠的、已公开的信息编制，但本公司对该等信息的准确性及完整性不作任何保证。本报告所载的意见、结论及预测仅反映报告发布当日的观点和判断。在不同时期，本公司可能会发出与本报告所载意见、评估及预测不一致的研究报告。本公司不保证本报告所含信息保持在最新状态。本公司对本报告所含信息可在不发出通知的情形下做出修改，投资者应当自行关注相应的更新或修改。

本公司力求报告内容客观、公正，但本报告所载的观点、结论和建议仅供参考，投资者并不能依靠本报告以取代行使独立判断。对投资者依据或者使用本报告所造成的一切后果，本公司及作者均不承担任何法律责任。

本报告版权仅为本公司所有。未经本公司书面许可，任何机构或个人不得以翻版、复制、发表、引用或再次分发他人等任何形式侵犯本公司版权。如征得本公司同意进行引用、刊发的，需在允许范围内使用，并注明出处为“华泰期货研究院”，且不得对本报告进行任何有悖原意的引用、删节和修改。本公司保留追究相关责任的权力。所有本报告中使用的商标、服务标记及标记均为本公司的商标、服务标记及标记。

华泰期货有限公司版权所有并保留一切权利。

公司总部

广州市天河区临江大道 1 号之一 2101-2106 单元 | 邮编：510000

电话：400-6280-888

网址：www.htfc.com